Clasa a XII-a — Soluţii şi barem orientativ

Problema 1. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, astfel încât

$$\int_0^n f(x)f(n-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^n (f(x))^2\,\mathrm{d}x,$$

oricare ar fi numărul natural $n \geq 1$. Să se arate că funcţia f este periodică.

Soluţie. Fie n un număr natural nenul. Cu substituţia $y = n - x$, obţinem

$$\int_0^n f(n-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^n (f(n-y))^2\,\mathrm{d}y.$$

.... **2 puncte**

Prin adunarea acestei relaţii cu cea din enunţ, rezultă

$$\int_0^n (f(x) - f(n-x))^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

Din continuitatea lui f deducem că $f(x) = f(n-x)$ pentru orice $x \in [0, n]$.

.... **3 puncte**

Fie $x \geq 0$ şi $n \geq x$ un număr natural nenul. Atunci

$$f(x+1) = f(n+1-x-1) = f(n-x) = f(x).$$

.... **2 puncte**

Problema 2. Fie $(R, +, \cdot)$ un inel şi f un endomorfism surjectiv al său, astfel încât $[x, f(x)] = 0$ oricare ar fi $x \in R$, unde $[a, b] = ab - ba$, $a, b \in R$. Să se arate că:

(a) $[x, f(y)] = [f(x), y]$ şi $x[x, y] = f(x)[x, y]$, oricare ar fi $x, y \in R$;

(b) Dacă R este corp şi f este diferit de identitate, atunci R este comutativ.

Soluţie. **(a)** Demonstrăm prima relaţie:

$$\begin{aligned} 0 &= [x-y, f(x-y)] = [x-y, f(x) - f(y)] \\ &= [x, f(x)] - [x, f(y)] - [y, f(x)] + [y, f(y)] = -[x, f(y)] + [f(x), y]. \end{aligned}$$

. . . . **2 puncte**

Demonstraţia celei de a doua relaţii face apel la prima. Fie $y = f(z)$, $z \in R$. Atunci

$$\begin{aligned} x[x,y] &= x[x,f(z)] = x[f(x),z] = xf(x)z - xzf(x) = f(x)xz - xzf(x) \\ &= [f(x),xz] = [x,f(xz)] = [x,f(x)y] = xf(x)y - f(x)yx \\ &= f(x)xy - f(x)yx = f(x)[x,y]. \end{aligned}$$

. . . . **2 puncte**

(b) Arătăm că $R^* = Z(R^*) = \{x : x \in R^*, xy = yx$ oricare ar fi $y \in R^*\}$, centrul grupului multiplicativ R^*. Fie $\operatorname{Fix} f = \{x : x \in R^*, f(x) = x\}$. Din a doua egalitate de la punctul **(a)**, rezultă că $R^* \setminus Z(R^*) \subseteq \operatorname{Fix} f$, deci $R^* = Z(R^*) \cup \operatorname{Fix} f$. Întrucât $Z(R^*)$ şi $\operatorname{Fix} f$ sunt şi subgrupuri ale lui R^*, sau $\operatorname{Fix} f \subseteq Z(R^*)$, caz în care $R^* = Z(R^*)$; sau $Z(R^*) \subseteq \operatorname{Fix} f$, caz în care $R^* = \operatorname{Fix} f$, i.e., f este identitatea — contradicţie. Prin urmare, $R^* = Z(R^*)$, i.e., R^* este comutativ.

. . . . **3 puncte**

Remarci. Un endomorfism cu proprietatea din enunţ se numeşte endomorfism *comutativ*. Un inel *prim* este un inel care are următoarea proprietate: dacă produsul a două ideale este nul, atunci cel puţin unul dintre cele două ideale este nul. Folosind a doua relaţie de la punctul **(a)**, se poate demonstra că un inel prim care posedă un automorfism comutativ diferit de identitate, este comutativ şi integru (fără divizori ai lui zero).

Teorema lui Wedderburn — orice corp finit este comutativ — este un caz particular al rezultatului de la punctul **(b)**: cu excepţia cazului trivial al corpului cu p elemente (p prim), orice corp finit de caracteristică p admite un automorfism comutativ diferit de identitate — automorfismul Frobenius, $x \mapsto x^p$.

Problema 3. Fie $\mathcal{C}$ mulţimea funcţiilor integrabile $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, astfel încât $0 \le f(x) \le x$ oricare ar fi $x \in [0,1]$. Definim funcţia $V : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ prin

$$V(f) = \int_0^1 (f(x))^2 \, \mathrm{d}x - \left(\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x \right)^2, \quad f \in \mathcal{C}.$$

Să se determine următoarele două mulţimi:

(a) $\{V(f_a) \,|\, 0 \le a \le 1\}$, unde $f_a(x) = 0$, dacă $0 \le x \le a$, şi $f(x) = x$, dacă $a < x \le 1$;

(b) $\{V(f) \mid f \in \mathcal{C}\}$.

Soluţie. **(a)** Mulţimea cerută este intervalul închis $[0, 5(3-\sqrt{5})/24]$:

$$V(f_a) = \int_a^1 x^2\,\mathrm{d}x - \left(\int_a^1 x\,\mathrm{d}x\right)^2 = (1-a^3)/3 - (1-a^2)^2/4$$

este o funcţie polinomială al cărei punct de maxim pe $[0,1]$ este $(\sqrt{5}-1)/2$. Concluzia rezultă din monotonia acestei funcţii.

.... **3 puncte**

(b) Arătăm că această mulţime este inclusă în mulţimea de la punctul **(a)**. Fie $f \in \mathcal{C}$. Vom demonstra că există a în $[0,1]$, astfel încât $V(f) \leq V(f_a)$.

....**1 punct**

Fie

$$a = \left(1 - 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \in [0,1].$$

Atunci

$$\int_0^1 f_a(x)\,\mathrm{d}x = (1-a^2)/2 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

deci

$$\begin{aligned} V(f_a) - V(f) &= \int_0^1 \left((f_a(x))^2 - (f(x))^2\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(xf_a(x) - (f(x))^2\right)\,\mathrm{d}x \\ &\geq \int_0^1 x\,(f_a(x) - f(x))\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

....**1 punct**

Vom arăta că ultima integrală este pozitivă. Considerăm funcţia integrabilă $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = f_a(x) - f(x)$. Mai întâi demonstrăm că

$$\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$$

oricare ar fi $x \in [0,1]$. Considerăm cele două cazuri posibile: dacă $0 \leq x \leq a$, atunci

$$\begin{aligned} \int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_x^1 (f_a(t) - f(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f_a(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\geq \int_0^1 f_a(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\,; \end{aligned}$$

iar dacă $a \leq x \leq 1$, atunci

$$\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^1 \left(f_a(t) - f(t)\right)\,\mathrm{d}t = \int_x^1 \left(t - f(t)\right)\,\mathrm{d}t \geq 0.$$

....**1 punct**

Aplicând formula a doua de medie, rezultă că există $b \in [0,1]$ astfel încât

$$\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^1 g(x)\,\mathrm{d}x \geq 0,$$

de unde concluzia.

....**1 punct**

Remarci. **(1)** Inegalitatea

$$\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

poate fi demonstrată şi fără formula de medie. Fie n un număr natural nenul. Atunci:

$$\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \int_{k/n}^{(k+1)/n} g(x)\,\mathrm{d}x\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \int_{k/n}^{(k+1)/n} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dacă $M = \sup\{|g(x)| : 0 \leq x \leq 1\}$, atunci

$$\left|\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \int_{k/n}^{(k+1)/n} g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(x - \frac{k}{n}\right) |g(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{M}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) = \frac{M}{n}\,.$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \int_{k/n}^{(k+1)/n} g(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \left(\int_{k/n}^1 g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{(k+1)/n}^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \int_{k/n}^1 g(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \int_{k/n}^1 g(x)\,\mathrm{d}x + \\ &\quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_{k/n}^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k/n}^1 g(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

de unde concluzia.

(2) O altă posibilitate este integrarea prin părţi pentru integrale Lebesgue:

$$\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}x.$$

Problema 4. Fie m şi n două numere naturale nenule. Să se determine numărul minim de rădăcini complexe distincte ale polinomului $\prod_{k=1}^{m}(f+k)$, când f parcurge mulţimea polinoamelor de grad n cu coeficienţi complecşi.

Soluţie. Minimumul cerut este $n(m-1)+1$ şi e atins pentru oricare dintre polinoamele $X^n - k$, $k = 1, \cdots, m$.

.... **1 punct**

Vom arăta că numărul de rădăcini distincte ale unui polinom care are forma din enunţ este cel puţin $n(m-1)+1$.

Pentru orice $f \in \mathbb{C}[X]$, $f \neq 0$, şi orice $z \in \mathbb{C}$, fie $\mathrm{ord}_z f = \mathrm{ord}_{X-z} f$ cea mai mare putere a lui $X - z$ care îl divide pe f. Mulţimea $Z(f) = \{z : z \in \mathbb{C}, \mathrm{ord}_z f \neq 0\}$ este exact mulţimea rădăcinilor distincte ale lui f, şi

$$\sum_{z\in\mathbb{C}} \mathrm{ord}_z f = \sum_{z\in Z(f)} \mathrm{ord}_z f = \deg f.$$

Prin urmare,

$$|Z(f)| + \sum_{z\in Z(f)} (\mathrm{ord}_z f - 1) = \deg f.$$

Dar

$$\sum_{z\in Z(f)} (\mathrm{ord}_z f - 1) = \sum_{z\in\mathbb{C}} \mathrm{ord}_z(f, f'),$$

unde f' este derivata lui f şi (f, f') este cel mai mare divizor comun al lui f şi f'. Deci

$$|Z(f)| + \sum_{z\in\mathbb{C}} \mathrm{ord}_z(f, f') = \deg f. \tag{$*$}$$

.... **2 puncte**

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f \neq 0$, şi $g = \prod_{k=1}^{m}(f + a_k)$, unde m este un număr natural nenul, iar a_k sunt numere complexe distincte două câte două. Pentru g relaţia $(*)$ devine:

$$|Z(g)| + \sum_{z\in\mathbb{C}} \mathrm{ord}_z(g, g') = \deg g = m \deg f.$$

Deoarece $g' = f' \sum_{k=1}^{m} \prod_{j \neq k} (f + a_j)$, iar polinoamele $f + a_k$ sunt coprime două câte două, dacă $\deg f \geq 1$, atunci (g, g') divide f', deci

$$\sum_{z \in \mathbb{C}} \operatorname{ord}_z(g, g') \leq \sum_{z \in \mathbb{C}} \operatorname{ord}_z f' = \deg f' = \deg f - 1.$$

Prin urmare, $|Z(g)| \geq (m-1) \deg f + 1$.

.... **4 puncte**